

Cinemática Topológica
 Cristian Valdez
 Departamento de Física de la Universidad del Valle de Guatemala, 18 avenida
 11-95 zona 15,
 Vista Hermosa III, Guatemala, Guatemala. 01015.
 val08367@gmail.com

1. Introducción y Motivación

En mecánica clásica de pregrado nunca hacemos referencia a la curvatura del mundo o del sistema donde nuestra partícula está situada. Por ejemplo, si se imagina una hormiga moviéndose sobre una canica, para la hormiga el espacio es muy curvo y no es plano como lo experimenta la mayoría de nosotros en nuestras actividades cotidianas. Existe un aparato teórico para trabajar sobre cualquier *espacio* de esta manera, el muy conocido cálculo de variedades; sin embargo, un estudiante de pre grado en la Universidad del Valle de Guatemala pocas veces tiene la oportunidad de cruzarse con las ideas de geometría diferencial. Entonces, debido a esta situación resulta importante para mi intentar reconocer otros posibles métodos para comprender la cinemática. Se me ha ocurrido una idea bastante simple para realizar cálculos, quizás nos dejan de ser cálculos abstractos, sin embargo deja abierta la posibilidad de estudiar la geometría de la trayectoria para determinar ciertas propiedades del movimiento. El inicio de esta teoría intenta librarse del esquema direccional de un sistema coordenado.

2. Descripción Geométrica de un Sistema y Movimiento

Un espacio M cumple las siguientes condiciones:

- (S1) $M \subset \mathbb{R}^3$.
- (S2) M es un espacio topológico formado por la topología relativa de la topología usual de \mathbb{R}^3 .
- (S3) M es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .
- (S4) M es un conjunto Lebesgue medible.

Por ejemplo un espacio válido es el siguiente conjunto $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, la esfera unitaria, en efecto cuando pensamos en la base abierta de S_2 realmente nos damos cuenta que son los discos abiertos de \mathbb{R}^2 deformados, este fenómeno en geometría diferencial se le conoce como una variedad de dimensión 2, en este sentido la condición 3, significa que para cada punto en el espacio existe una vecindad del punto que es homeomorfa a \mathbb{R}^2 . Otro punto importante, la razón por la cual M es Lebesgue medible es para que los abiertos de la topología relativa sean medibles, i.e., tenemos un sistema de conjuntos medibles en el espacio M , esto nos abre un mundo infinito de posibilidades. Otros ejemplos de espacios son: cilindros finitos e infinitos, paraboloides, hiperboloides finitos, cinta de Möbius, botella de Klein, toroide, entre otras.

Una trayectoria $\zeta : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ cumple las siguientes condiciones:

- (T1) $\zeta : [a, b] \rightarrow M$ es continua
 (T3) $\zeta \in C^2([a, b], \mathbb{R}^3)$

El intervalo cerrado $[a, b]$ es lo que denominamos como tiempo, además se supone que $a < b$. Son dos condiciones simples que tienen un gran impacto, en primer lugar hay que resaltar que $\zeta([a, b]) \subset M$, además $\zeta([a, b])$ es compacto, conectado y además es un conjunto Lebesgue medible, la trayectoria ζ es una función Lebesgue medible por la continuidad. Una propiedad importante que se estudia en geometría diferencial que debe ser mencionada es que el espacio topológico de la imagen de la trayectoria es localmente homeomorfa a \mathbb{R} , esto significa que $\zeta([a, b])$ tiene una estructura topológica similar a un intervalo cerrado de \mathbb{R} ; es como que si hubieramos deformado el intervalo sobre la superficie M . La razón por la cual una trayectoria debe cumplir con ser una curva suave y derivable dos veces es porque debe satisfacer la ecuación de Newton, en efecto el operador $F : C^2([a, b], \mathbb{R}^3) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^3)$, definido como el producto de la masa y la segunda derivada temporal de la trayectoria, nos permite saber que fuerza genera tal trayectoria, esto razón es una consecuencia del mundo mismo tal y como lo expone V.I. Arnold en su libro *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, no existe forma de demostrar que es cierto el enunciado de una premisa anterior, solamente existen principios equivalentes.

Consideré a $M = S_2$, la esfera unitaria, y $\zeta(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Este ejemplo claramente establece las relaciones dadas anteriormente, en efecto, M es una superficie medible, y $\zeta : [0, 2\pi] \rightarrow M$ es una función continua y además es doblemente diferenciable, donde claramente $\zeta'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ y $\zeta''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$ son dos funciones continuas hacia \mathbb{R}^3 . También es importante mencionar que $\zeta([0, 2\pi])$ es una circunferencia cerrada, compacta, conectada y medible; básicamente es un conjunto con propiedades interesantes.

3. Cinemática Topológica

La posición de la partícula está dada por $\zeta(t)$ para un tiempo t , sin embargo que podemos decir acerca de su velocidad. En mecánica clásica sabemos que su velocidad se puede describir como primera derivada temporal de la posición, y además podemos completar la función para que $\zeta' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, esta manera de calcular la velocidad nos da su comportamiento por componentes. Esta manera es bastante eficiente de calcular la velocidad, y es la que estamos acostumbrados a usar pero quizás no es lo que necesitamos. Supóngase una partícula en S_2 , y la pregunta sería ¿qué tan útil le es a un observador sobre S_2 saber la velocidad de la partícula respecto de un observador en el origen de \mathbb{R}^3 ? Quizas está pregunta es complicada de responder, pero este es un caso simple, supóngase al observador sobre una cinta de Möbius, ya empieza a ser evidente que realmente se complica para el observador. ¿Cómo puede un observador en una superficie calcular la velocidad? Existe todo un aparato teórico para realizar estas operaciones, un estudiante de pre grado le llama cambio de coordenadas para utilizar coordenadas curvilíneas, en el caso de S_2 se utilizan coordenadas esféricas, sin embargo se quiere evitar el uso de geometría diferencial.

Sea $\zeta : [a, b] \rightarrow M$ una trayectoria, entonces la longitud de arco puede expresarse analíticamente como:

$$L(\zeta) = \sup_{\Pi \in P([a, b])} \sum_{i=1}^n \rho(\zeta(t_{i-1}), \zeta(t_i))$$

Donde sabemos que $P([a, b])$ es el conjunto de particiones finitas de la forma $a = t_0 < t_1 \cdots t_{n-1} < t_n = b$. En análisis real se demuestra que la longitud de arco es independiente de la parametrización. Esta definición de longitud de arco es simplificada por la medida de Lebesgue, y en efecto

$$L(\zeta) = m(\zeta([a, b]))$$

Aquí salta la razón por la cual era necesario que M fuera un conjunto medible. Para este momento ya es posible obtener la velocidad promedio de la partícula. Antes de hacer esto realizaremos una complicación técnica más, sabemos que $[a, b] = \zeta^{-1}(\zeta([a, b]))$, en particular por que ζ es continua y sobreyectiva. Entonces podemos definir la rapidez promedio como

$$\langle v \rangle = \frac{m(\zeta([a, b]))}{m(\zeta^{-1}(\zeta([a, b])))}$$

En este momento se debe de recordar que la medida de Lebesgue utilizada en el numerador es en \mathbb{R}^3 y la medida de Lebesgue se utiliza en el cociente es en \mathbb{R} .

Ahora, consideré $x \in \zeta([a, b])$, entonces dado que $\zeta([a, b])$ es un subespacio topológico de M , este conjunto también posee una base abierta, como consecuencia que es un sub espacio de \mathbb{R}^3 , un espacio localmente conectado; entonces lo anterior implica que existe un conjunto $\{U_\lambda^x\}_{\lambda \in \Lambda}$ de vecindades conectadas de x que genera cualquier vecindad V de x , las vecindades son conjuntos abiertos conectados, estos conjuntos se pueden imaginar como que fueran de una sola pieza.

Para $x \in \zeta([a, b])$ seleccione una vecindad V cualquiera, entonces definimos la rapidez promedio en la vecindad V como

$$\langle v_x, V \rangle = \frac{m(V)}{m(\zeta^{-1}(V))}$$

Es importante resaltar en este momento que por la continuidad de ζ , tenemos que $\zeta^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de $[a, b]$ y además medible. Esta rapidez no tiene dirección, solo tiene magnitud sin embargo es un primer acercamiento para intentar describir la cinemática sobre un espacio arbitrario, donde resulte casi imposible seleccionar un sistema coordenado adecuado. Ahora para un $t \in [a, b]$

le corresponde $\zeta(t)$, para esta existe un sistema de vecindades $\{U_\lambda^{\zeta(t)}\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Nótese la siguiente relación, si $U_{\lambda_i}^{\zeta(t)} \subset U_{\lambda_j}^{\zeta(t)}$, entonces $m(U_{\lambda_i}^{\zeta(t)}) \leq m(U_{\lambda_j}^{\zeta(t)})$

y $m(\zeta^{-1}(U_{\lambda_i}^{\zeta(t)})) \leq m(\zeta^{-1}(U_{\lambda_j}^{\zeta(t)}))$, sin embargo, no necesariamente ocurre

que $\frac{m(U_{\lambda_i}^{\zeta(t)})}{m(\zeta^{-1}(U_{\lambda_i}^{\zeta(t)}))} \leq \frac{m(U_{\lambda_j}^{\zeta(t)})}{m(\zeta^{-1}(U_{\lambda_j}^{\zeta(t)}))}$. Esto anterior motiva la siguiente relación

de orden parcial \prec sobre el siguiente conjunto $\{\langle v_{\zeta(t)}, U_\lambda^{\zeta(t)} \rangle : \lambda \in \Lambda\}$, decimos

entonces que $U_{\lambda_j}^{\zeta(t)} \prec U_{\lambda_i}^{\zeta(t)}$ si, y sólo si, $U_{\lambda_i}^{\zeta(t)} \subset U_{\lambda_j}^{\zeta(t)}$ y $\frac{m(U_{\lambda_i}^{\zeta(t)})}{m(\zeta^{-1}(U_{\lambda_i}^{\zeta(t)}))} \leq$

$\frac{m(U_{\lambda_j}^{\zeta(t)})}{m(\zeta^{-1}(U_{\lambda_j}^{\zeta(t)}))}$. Entonces el par ordenado $(\{\{U_{\lambda}^{\zeta(t)}\} : \lambda \in \Lambda\}, \prec)$ define un conjunto dirigido. Entonces mediante la función descrita en 1.4, le llamaremos rapidez vecindal, $\Sigma : \{\{U_{\lambda}^{\zeta(t)}\} : \lambda \in \Lambda\} \rightarrow \{\langle v_{\zeta(t)}, U_{\lambda}^{\zeta(t)} \rangle : \lambda \in \Lambda\}$ construimos una red, en particular sabemos que la red converge a $\inf \{\langle v_{\zeta(t)}, U_{\lambda}^{\zeta(t)} \rangle : \lambda \in \Lambda\}$, el cual existe dado que $\{\langle v_{\zeta(t)}, U_{\lambda}^{\zeta(t)} \rangle : \lambda \in \Lambda\}$ está acotado inferiormente y es no vacío. En base el tema expuesto anteriormente definimos la rapidez instantánea para t como

$$v(t) = \inf \{\langle v_{\zeta(t)}, U_{\lambda}^{\zeta(t)} \rangle : \lambda \in \Lambda\}$$

De igual manera se puede trabajar con la aceleración utilizadon la función extendida de la velocidad como la primera derivada temporal de la trayectoria, i.e., realizando el proceso descrito anteriormente para $\zeta'(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces utilizando la topología de \mathbb{R}^n se ha construido una teoría de cinemática diferente a la usual, en particular porque nos hemos salido del concepto de considerar las trayectorias como objetos funcionales, sino como objetos geométricos.

4. Referencias

- T. Terence, *Analysis II*, 1th ed., India: Hindustan Book Agency, 2006.
A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, 1th ed., United States: Dover Publications, 1975.
M. Gemignani, *Elementary Topology*, 2nd ed., United States: Dover Publications, 1992
V.I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., United States: Springer-Verlag New York, 1989.
K. Jänich, *Topology*, 2nd. ed., United States: Springer-Verlag New York, 1980.